Лекция 1

§1. Системы линейных уравнений

Начнем с рассмотрения частных случаев.

Частные случаи СЛУ

1) Самая простая система линейных уравнений - одно уравнение и одно неизвестное. Запишем уравнение в общем виде:

$$ax = b; a, b \in \mathbb{R}.$$

Возможны 2 случая:

1.1. Общий: $a \neq 0$.
Тогда $x = \dfrac{b}{a}$ - решение.

1.2. Вырожденный: $a = 0$. Здесь вид решения также зависит от вида коэффициента b.
a) $b = 0$, тогда x - любое (обозн. $x \in \mathbb{R}$).
b) $b \neq 0$, тогда решений нет.

2) Рассмотрим теперь систему, состоящую из одного уравнения с двумя неизвестными.

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

2.1. Пусть $a_1 \neq 0$.
Тогда $x_1 = \dfrac{1}{a_1}(b - a_2x_2)$, $x_2 \in \mathbb{R}$.

Казалось бы, возникает какая-то несимметрия. Ведь общий случай - это когда все коэффииенты не нулевые. Но x_1 некоторым образом выражается через x_2, а x_2 - любое, хотя эти неизвестные равноправны.
Мы выбрали главные неизвестные - в нашем случае только x_1, то есть такие, которые выражаются через остальные неизвестные. Такие неизвестные как x_2 будем называть свободными.
Можно было сделать наоборот и тоже получить правильное решение, но записанное в другой форме.

Не будем сейчас проводить полный разбор случаев, это будет сделано на семинарах.
Рассмотрим еще только один случай.

2.2. $a_1 = a_2 = b = 0$, тогда $x_1 \in \mathbb{R}, x_1 \in \mathbb{R}$.
Вроде бы, и в случае 2.1, и в случае 2.2 x_1 - любое и x_2 - любое. Однако эти

"любые" - разные. Почему?
В случае 2.2 x_1, x_2 независимы друг от друга и пробегают все вещественные значения.
В случае 2.1 x_2 пробегает все вещественные значения, но, при заданном x_2, x_1 находится однозначно.
В таком случае говорят, что в 2.1 одна свободная неизвестная, а в 2.2 две свободных неизвестных.

3) В предыдущем пункте мы рассмотрели систему линейных уравнений с одним уравнением и двумя неизвестными, пусть теперь наоборот - два уравнения и одна неизвестная.

$$\begin{cases} a_1x = b_1 \\ a_2x = b_2 \end{cases}$$

Начнем с общего случая.

3.1. $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$, получаем, что $x = \dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2}$.
Таким образом, в общем случае нет решений, если коэффициенты выбраны наугад, и $\dfrac{b_1}{a_1} \neq \dfrac{b_2}{a_2}$.
Если же уравнения системы пропорциональны, то существует единственное решение $x = \dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2}$. Более детальный анализ этой системы в вырожденных случаях будет сводиться к пунктам 1) и 2).

4) Рассмотрим последний частный случай - систему с двумя уравнениями и двумя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Здесь первый индекс у a_{ij} - это номер строки, второй индекс - это номер столбца.

4.1. В общем случае (то есть когда в ходе преобразований знаменатель не обращается в ноль) после преобразований получим:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};$$

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Видно, что числители здесь очень похожи, а знаменатели и вовсе одинаковые. Хотим эти выражения обозначить одним символом.

Введем следующую функцию, называемую "определитель". Это функция от четырех переменных, записанных в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы равен:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ - это число.}$$

Таким образом, мы с каждой квадратной матрицей 2×2 связали число, полученное по следующему правилу: из произведения чисел на главной диагонали вычли произведение чисел на побочной диагонали.

Теперь можно кратко записать формулы для решения системы 2×2 следующим образом:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \tag{1.1}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.2}$$

Здесь в знаменателе стоит определитель матрицы коэффициентов.
Если мы ищем первую неизвестную, то в числителе стоит тоже матрица коэффициентов, в которой первый столбец заменили на столбец свободных членов.
Если же мы выражаем вторую неизвестную, то в числителе стоит матрица коэффициентов, в которой, соответственно, второй столбец заменили на столбец свободных членов.

Эти формулы в более общем виде (для систем $n \times n$) будут доказаны позднее. Их получил швейцарский математик Габриэль Крамер (1704 - 1752).

Проведем более полный анализ нашей системы:

Если знаменатель в формулах (1.1), (1.2) не равен 0, то существует единственное решение - (1.1), (1.2).

4.2 $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = b_1 = b_2$ - две свободные неизвестные и бесконечно много решений.
4.3 Уравнения пропорциональны, тогда имеем одну свободную неизвестную и

бесконечно много решений.

Таким образом, из равенства знаменателя нулю еще не следует отсутствие решений.

Системы линейных уравнений. Определения.

Определение 1.1. *Матрица порядка $m \times n$ - это прямоугольная таблица, заполненная числами, состоящая из m строк и n столбцов.*

Запишем такую матрицу в общем виде.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Определение 1.2. *Общий вид системы линейных уравнений (СЛУ) следующий:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

здесь $a_{i,j}$ - коэффициенты, b_j - свободные члены, x_j - неизвестные.

С этой системой связаны две матрицы.

Определение 1.3. *Матрица коэффициентов:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение 1.4. *Расширенная матрица системы:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Определение 1.5. *Решение СЛУ - набор чисел $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, который после подстановки в систему обращает все уравнения в верные равенства.*
Решить систему - это найти все ее решения или показать, что их нет.

Определение 1.6. *1) СЛУ совместна, если она имеет хотя бы одно решение, иначе - несовместна.*

2) СЛУ определена, если она имеет ровно одно решение.
Если решений больше, то система не определена.

3) СЛУ однородна, если $b_k = 0$ для всех $k = 1, \dots, m$.
Заметим, что однородная система совместна, так как $(0, 0, \dots, 0)$ - решение.

4) Две системы эквивалентны, если множества их решений совпадают.

Цель: заменить данную систему на эквивалентную, которую легко решить. Возьмем произвольную систему и будем проводить преобразования, приводящие к эквивалентным системам, то есть системам с таким же множеством решений. В итоге придем к намного более простой системе и решим ее, решив тем самым и исходную систему.

Определим сначала три типа элементарных преобразований над строками матриц.

Определение 1.7. *Три типа элементарных преобразований над строками матрицы:*

1) Прибавление к одной строке другой, умноженной на число;

2) Перестановка двух строк;

3) Умножение одной строки на ненулевое число.

Как мы сейчас увидим, все эти преобразования обратимы.

Определение 1.8. *Лидер (ведущий элемент) ненулевой строки - это ее первый ненулевой элемент.*

Определение 1.9. *Матрица называется ступенчатой, если*

1) Номера лидеров ее ненулевых строк образуют строго возрастающую последовательность;

2) Все нулевые строки стоят после всех ненулевых.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определение 1.10. *Матрица $A = (a_{ij})$ называется верхнетреугольной, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$.*

Упражнение 1.1. *Доказать, что любая ступенчатая матрица является верхнетреугольной, но обратное не верно!*

Докажем теорему, составляющую суть метода Гаусса.

Метод Гаусса исключения переменных. Теорема 1.

Теорема 1.1. *Любую матрицу путем элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.*

Доказательство. Если матрица A нулевая (полностью состоит из нулей), то она ступенчатая.

Иначе, пусть j - это номер первого ненулевого столбца.
Переставим в матрице строки, таким образом добьемся, чтобы $a_{1j} \neq 0$.
Вычитая первую строку из последующих с подходящими коэффициентами, обнулим все прочие элементы в j-том столбце.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1j} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1j} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1j} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & A_1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{pmatrix}$$

Далее повторяем процедуру с матрицей A_1.
Рассуждая по индукции по числу строк, приведем A к ступенчатому виду. □

Замечание 1.1. *В процессе этих рассуждений мы использовали только тип 1 и тип 2 элементарных преобразований. Тип 3 пока не понадобился.*

Приведение ступенчатой матрицы к улучшенному виду

Определение 1.11. *Улучшенный ступенчатый вид матрицы - это ее ступенчатый вид плюс:*

1) Лидеры всех ненулевых строк равны 1;

2) Каждый лидер - единственный ненулевой элемент своего столбца.

Любую ступенчатую матрицу можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

Проиллюстрируем это:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножая каждую ненулевую строку на число, обратное лидеру, превращаем лидеров каждой ненулевой строки в 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь сделаем лидера каждой ненулевой строки единственным ненулевым элементом в своем столбце.

Начинаем с конца. В нашем примере возьмем 4 строку и вычтем ее из всех строк сверху с подходящими коэффициентами, превратим таким образом все элементы над этим лидером в нули.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Повторяя последовательно такую процедуру с третьей и второй строками, получим улучшенную ступенчатую матрицу.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса исключения переменных. Теорема 2.

Определение 1.12. *Три типа элементарных преобразований над СЛУ:*

1) *Прибавление к одному уравнению другого, умноженного на любое число;*
2) *Перестановка двух уравнений;*
3) *Умножение одного уравнения на ненулевое число.*

Теорема 1.2. *Если одна СЛУ получена из другой конечной последовательностью элементарных преобразований, то эти системы эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ является решением СЛУ, то оно остается решением и после применения элементарного преобразования.
Для типа 1:
Пусть $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ является решением i-того и j-того уравнений

$$a_{i1}x_1^0 + \ldots + a_{in}x_n^0 = b_i;$$

$$a_{j1}x_1^0 + \ldots + a_{jn}x_n^0 = b_j.$$

Прибавим к j-тому уравнению i-тое, умноженное на λ и подставим $(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Получим

$$(a_{j1} + \lambda a_{i1})x_1^0 + \ldots + (a_{jn} + \lambda a_{in})x_n^0 = b_j + \lambda b_i$$

также верное равенство.

Для типов 2 и 3 - очевидно.

Теперь поймем, почему решение новой системы все еще является решением исходной системы.

Заметим, что элементарные преобразования обратимы. явно напишем обратное преобразование к каждому типу.

Обозначим (i) - i-тое уравнение, (j) - j-тое уравнение.

1 тип.
Прямое преобразование:

$$(i) \to (i) + \lambda(j).$$

Обратное преобразование:

$$(i) \to (i) - \lambda(j).$$

Т. е. прибавляем строку, умноженную на $-\lambda$.

2 тип.
Прямое преобразование:

$$(i) \leftrightarrow (j).$$

Обратное преобразование:

$$(j) \leftrightarrow (i).$$

Т.е. применяем это преобразование еще раз.
3 тип.

Прямое преобразование:

$$(i) \to \lambda(i).$$

Обратное преобразование:

$$(i) \to \lambda^{-1}(i).$$

Т.е. умножаем на ненулевое число.

Значит, если мы доказали, что решение остается решением после элементарного преобразования, то для доказательства в обратную сторону достаточно применить обратное преобразование. □